Seria 1

1. Rozwiąż rebus liczbowy YE·ME=TTT, gdzie różne litery odpowiadają różnym cyfrom.

   Szkic rozwiązania. Widzimy, że liczba po prawej stronie dzieli się przez $111 = 3 \cdot 37$, zatem jedna z dwucyfrowych liczb po lewej stronie to 37 lub 74. Sprawdzamy, że $27 \cdot 37 = 999$ jest rozwiązaniem rebusu. □

2. Mamy n odważników, których wagi są równe $1, 2, \ldots, n$ gramów. Dla jakich n możemy podzielić te odważniki na trzy grupy o równych wagach?

   Szkic rozwiązania. Suma wszystkich odważników $\frac{n(n+1)}{2}$ musi dzielić się przez 3, zatem $n \neq 3k+1$. Pokażemy, że dla liczb postaci $3k, 3k-1, k \geq 2$ zawsze istnieje żądany podział. Sprawdzając bezpośrednio, znajdujemy podział dla $n = 5, 6, 8, 9$. Następnie zauważamy, że jeżeli n spełnia warunki zadania, to $n+6$ również: parujemy $\{n+1, n+6\}, \{n+2, n+5\}, \{n+3, n+4\}$ i po jednej parze dołączamy do każdej z grup, zatem ich wagi pozostają równe. □

3. Na dwusiecznej kąta prostego w trójkącie prostokątnym wybrano punkt P i poprowadzono prostą, która odcina na przyprostokątnych odcinki o długościach a, b. Udowodnij, że wartość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ nie zależy od wyboru prostej.

   Szkic rozwiązania. Niech AB, AC będą przyprostokątnymi trójkąta. Rzuty P na odpowiednio AB, AC oznaczmy przez D, E, a przecięcia prostej z AB, AC przez F, G, gdzie $AF = a, AG = b$. Czworokąt $ADPE$ jest kwadratem, oznaczmy długość jego boku przez x. Zachodzi $\Delta FDP \sim \Delta PEG$, zatem $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x} \implies x = \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, czyli wartość ta zależy jedynie od wyboru P. □

4. Wykaż, że żadna liczba postaci $m(m+1), m \in \mathbb{N}$, nie jest potęgą liczby naturalnej.

   Szkic rozwiązania. $\mathrm{NWD}(m, m+1) = 1$, zatem $m(m+1)$ może być potęgą wtedy i tylko wtedy, gdy $m, m+1$ obie są potęgami tego samego stopnia. Niech zatem $m = a^b$ i wtedy $a^b < m+1 = a^b + 1 < (a+1)^b$, czyli $m+1$ nie może być liczbą postaci k^b dla żadnego k. □

5. Amerykanie i Chińczycy rozegrali turniej ping-ponga, w którym każdy zawodnik grał z każdym. Za wygraną dostawało się 1 punkt, a za przegraną 0. Po zakończeniu turnieju okazało się, że każdy zawodnik otrzymał połowę punktów, grając przeciwko zawodnikom z Chin. Udowodnić, że liczba zawodników w turnieju jest kwadratem liczby naturalnej.

   Szkic rozwiązania. Niech a - liczba zawodników amerykańskich, c - chińskich. Amerykanie w meczach między sobą zdobyli $\frac{1}{2}a(a-1)$, a Chińczycy między sobą zdobyli $\frac{1}{2}c(c-1)$. Jednocześnie, jest to tyle samo punktów, ile każda z grup zdobyła, grając z tą drugą grupą. Meczy między grupami było ac, zatem zachodzi

$$\frac{1}{2}a(a-1) + \frac{1}{2}c(c-1) = ac$$
$$a^2 + c^2 - a - c = 2ac$$
$$(a-c)^2 = a + c$$

   □